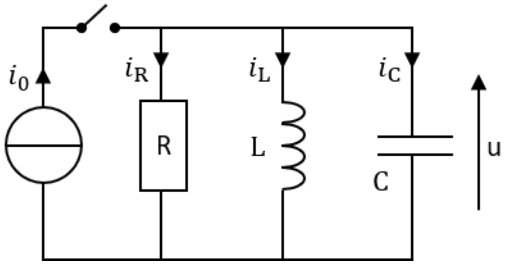
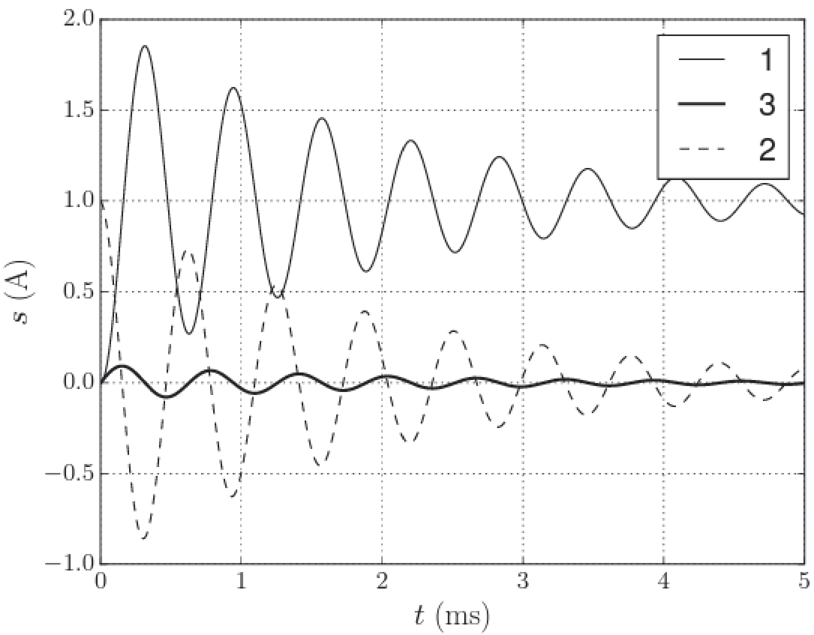
Électrocinétique | Chapitre 3 | TD (E3)

Exercice n°1 • Circuit RLC en dérivation *cours*

On dispose du circuit RLC en dérivation ci-dessous, alimenté par un générateur parfait de courant i_0. Le condensateur de capacité C est déchargé pour $t < 0$. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, alimentant ainsi le circuit par un échelon de courant d'intensité $i_0 = 1,0$ A. On donne $R = 1,0 \cdot 10^4\ \Omega$ et $L = 100$ mH.



Le graphe ci-dessous représente l'évolution des trois courants i_R, i_L et i_C en fonction du temps.



1) Déterminer les valeurs des intensités en $t = 0^+$ et lorsque $t \to \infty$. Associer ainsi les trois courbes 1, 2, 3 aux différents courants.

2) Établir l'équation différentielle satisfaite par $i_L(t)$.

3) Définir la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du circuit. En déduire une inégalité vérifiée par C pour que le circuit soit en régime pseudo-périodique.

On introduit le facteur d'amortissement λ et la pseudo-pulsation Ω :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

4) Donner l'expression de $i_L(t)$, solution de l'équation différentielle précédente.

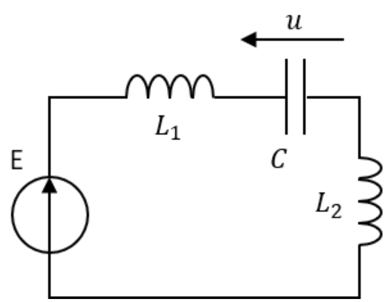
5) Estimer Q graphiquement et en déduire que la pseudo-pulsation Ω s'identifie à la pulsation propre ω_0.

6) Déterminer la valeur de la capacité C du condensateur puis la valeur de Q.

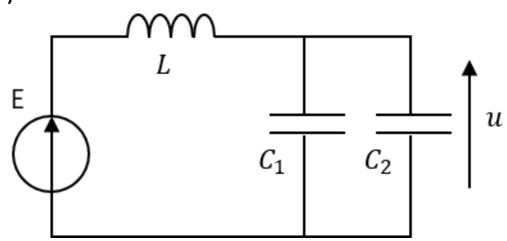
Exercice n°2 • Oscillateurs harmoniques ★☆☆

Pour chacun des circuits ci-dessous, montrer que $u(t)$ est solution d'une équation différentielle d'un oscillateur harmonique et déterminer l'expression de ω_0 en fonction des données du problème.

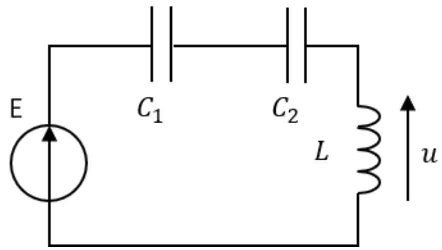
1)



2)

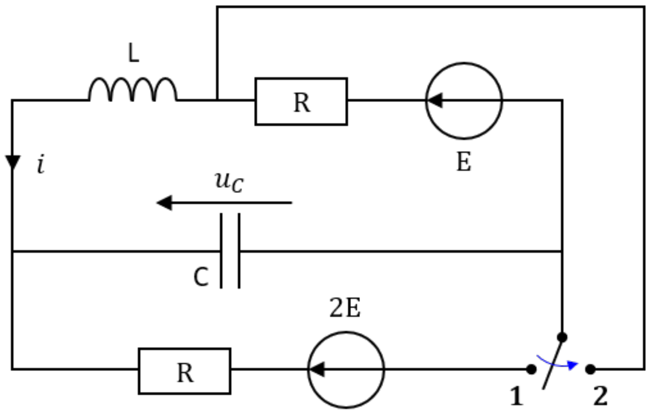


3)



Exercice n°3 • Conditions initiales d'un OH

On considère le circuit de la figure ci-dessous. L'interrupteur, initialement en position 1 depuis un temps très long, est placé en position 2 à l'instant $t = 0$.



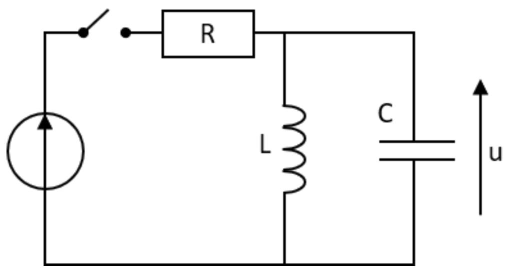
1) Déterminer les expressions de u_C et de i en $t = 0^-$.

2) Déterminer l'expression de $u_C(t)$ pour $t > 0$.

3) Déterminer l'amplitude et la phase à l'origine du signal.

Exercice n°4 • Circuit R(L||C)

On considère le circuit de la figure ci-dessous.



L'interrupteur est ouvert depuis longtemps et le condensateur déchargé, quand on le ferme à un instant qu'on choisit comme origine des temps.

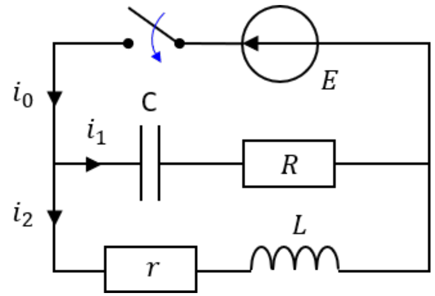
1) Établir et résoudre, dans le cas d'un régime pseudopériodique amorti, l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$.

2) Tracer l'allure de $u(t)$.

3) On a : $C = 1,0$ µF et $L = 10$ mH. Déterminer la valeur de R pour avoir un facteur de qualité $Q = 15$.

Exercice n°5 • Circuit d'ordre 1 et 2

On considère le circuit ci-dessous. L'interrupteur étant ouvert depuis un temps très long, on le ferme brutalement en $t = 0$.



1) Déterminer les valeurs des intensités i_0, i_1 et i_2 en $t = 0^+$, juste après la fermeture de l'interrupteur, puis en $t \to \infty$, une fois un régime stationnaire atteint.

2) Établir les équations différentielles vérifiées par $i_1(t)$ et $i_2(t)$ pour $t > 0$. Les résoudre et les tracer.

3) En déduire l'expression de $i_0(t)$. Que devient cette expression dans le cas où $R = r$ et $RC = L/R$?

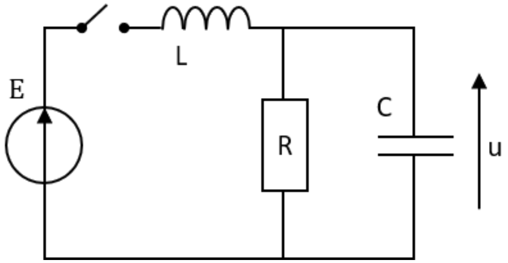
Dans toute la suite, on suppose que les conditions $R = r$ et $RC = L/R$ sont vérifiées et les résultats demandés doivent être exprimés en fonction de R et C (pas r ni L). L'interrupteur étant fermé depuis un temps très long, on l'ouvre brutalement en $t = 0$ (nouvelle origine des temps).

4) Établir l'équation différentielle vérifiée par $i_1(t)$. La résoudre et la tracer.

5) Déterminer l'énergie perdue par effet Joule après que l'on ait ouvert l'interrupteur.

Exercice n°6 • Circuit L(R||C)

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension dans le circuit ci-dessous.



Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et aucun courant ne circule dans le circuit. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. On donne : $R = 100\,\Omega$, $C = 1,0$ nF, $L = 1,0$ mH.

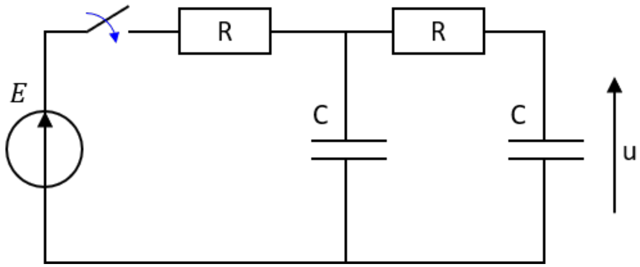
1) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ et l'écrire sous forme canonique en identifiant les expressions de ω_0 et Q.

2) Déterminer la solution de cette équation différentielle. La tracer.

3) Au-delà de quelle résistance, aura-t-on un régime pseudo-périodique ?

Exercice n°7 • Circuit avec deux condensateurs ★★★

Le circuit ci-dessous comporte deux résistances R et deux condensateurs de capacité C, initialement déchargés. À l'instant $t = 0$ on connecte un générateur de tension E au reste de circuit.



1) Déterminer la tension u_∞ vers laquelle tend $u(t)$ en régime permanent.

2) On pose $\tau = RC$, montrer que la tension $u(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{u} + \frac{3}{\tau}\,\dot{u} + \frac{u}{\tau^2} = \frac{E}{\tau^2}$$

3) Quel est le facteur de qualité Q du montage ?

4) Déterminer les conditions initiales.

5) Déterminer $u(t)$. La tracer.

Éléments de correction

❶ 1) $(1) \to i_L$, $(2) \to i_C$ et $(3) \to i_R$. 2) $\dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{i_L}{LC} = \dfrac{i_0}{LC}$. Régime pseudo-périodique : $C > \dfrac{L}{4R^2} = 0,25$ nF. 3) $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$. 4) $i_L(t) = i_0 - i_0\,e^{-\lambda t}\left[\cos(\Omega t) + \dfrac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]$. 5) $Q > 8 \gg 1/2$ donc $\Omega \simeq \omega_0$. 6) $C = 100$ nF et $Q = 10$. ❷ 1) $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)\,C}}$. 2) $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L\,(C_1+C_2)}}$. 3) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC_1} + \dfrac{1}{LC_2}}$ ❸ 1) $i(0^-) = -\dfrac{E}{2R}$ et $u_C(0^-) = \dfrac{3E}{2}$. 2) $u_C(t) = \dfrac{3E}{2}\cos(\omega_0 t) - \dfrac{E}{2R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}\sin(\omega_0 t)$. 3) $U_m = \dfrac{E}{2}\sqrt{9 + \dfrac{L}{R^2 C}}$ et $\tan(\phi) = \dfrac{\sqrt{L/C}}{3R}$. ❹ 1) $u(t) = \dfrac{E}{RC\Omega}\,e^{-\lambda t}\sin(\Omega t)$. 3) $R = 1,5$ kΩ ❺ 1) $i_1(0^+) = \dfrac{E}{R}$, $i_2(0^+) = 0$, $i_1(\infty) = 0$ et $i_2(\infty) = \dfrac{E}{r}$. 2) $\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{i_1}{\tau_1} = 0$ avec $\tau_1 = RC$ donc $i_1(t) = \dfrac{E}{R}\,e^{-t/\tau_1}$ et $\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{i_2}{\tau_2} = \dfrac{E}{L}$ avec $\tau_2 = \dfrac{L}{r}$ donc $i_2(t) = \dfrac{E}{r}\left(1 - e^{-t/\tau_2}\right)$. 3) $i_0(t) = i_1(t) + i_2(t)$ puis $i_0(t) = \dfrac{E}{R}$. 4) $\dfrac{d^2 i_1}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{di_1}{dt} + \omega_0^2\,i_1 = 0$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $Q = \dfrac{1}{2}$. Donc : $i_1(t) = -\dfrac{E}{R}\,e^{-t/\tau}$. 5) $\mathcal{E}_R = CE^2$. ❻ 1) $\ddot{u} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2\,u = \omega_0^2\,u$ avec : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$. 2) $u(t) = E\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\cos(\Omega t) + \dfrac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\right]$. 3) $R > 500\,\Omega$. ❼ 1) $u_\infty = E$. 3) $\omega_0 = 1/\tau$ et $Q = 1/3$. 4) $u(0^+) = 0$ et $\dot{u}(0^+) = 0$. 5) $u(t) = E\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\mathrm{ch}(\Omega t) + \dfrac{\lambda}{\Omega}\mathrm{sh}(\Omega t)\right)\right]$.